ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Δευτέρα 11 Ιουνίου 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

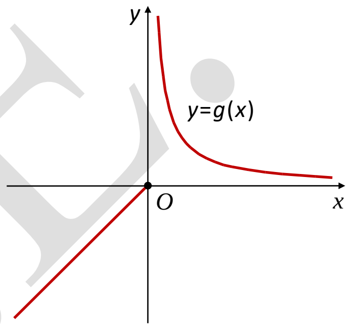
(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη θεωρήματος σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α.** Ψευδής

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ η οποία έχει γραφική παράσταση (σχήμα σχολικού βιβλίου σελ.35):



Η g(x) είναι συνάρτηση «1 – 1» στο $A_g=\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο A_g αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα.

Α3. Διατύπωση θεωρήματος σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

Α4. **α.** Λάθος (σελ. 33 σχ. βιβλίου)
β. Λάθος (σχόλιο σελ. 136 σχ. βιβλίου)
γ. Σωστό (τύπος σελ. 53 σχ. βιβλίου)
δ. Σωστό (σελ. 37 σχ. βιβλίου)
ε. Σωστό (σελ. 17 σχ. βιβλίου)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει : $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων (άθροισμα πολυωνυμικής με ρητή) με:

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=(x)'-4\left(\frac{1}{x^2}\right)'=1-4\left[-\frac{1}{(x^2)^2}(x^2)'\right]=$$

$$=1+\frac{4}{x^4}2x=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

Επίσης :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$$

και

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}>0\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}x^3(x^3+8)>0$$

Επομένως

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	‖	$+$	
x^3+8		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↗	

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $(0,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0=-2$ με τιμή:

$$f(-2)=-2-\frac{4}{(-2)^2}=-2-\frac{4}{4}=-2-1=-3$$

B2. Η $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως ρητή με

$$f''(x)=(1)'+\left(\frac{8}{x^3}\right)'=8\left(\frac{1}{x^3}\right)'=8\left[-\frac{1}{(x^3)^2}(x^3)'\right]=-\frac{8}{x^6}3x^2=-\frac{24}{x^4}<0$$

για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Άρα $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ οπότε η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$.

Β3. **Κατακόρυφη ασύμπτωτη θα αναζητήσουμε :** στο $x_0=0$ οπότε:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^+}x-\lim_{x\to0^+}\frac{4}{x^2}=0-4\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=-\infty \text{ αφού } \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}x-\lim_{x\to0^-}\frac{4}{x^2}=0-4\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}=-\infty$$

Άρα η ευθεία $\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ μια ευθεία (ε) της μορφής $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$

Τότε $\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$,

δηλαδή $\boxed{\lambda=1}$

και $\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]\overset{\lambda=1}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\cancel{x}-\frac{4}{x^2}-\cancel{x}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$, άρα $\boxed{\beta=0}$

Τότε η ευθεία $(\varepsilon): y=1x+0\Rightarrow\boxed{y=x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Εξετάζουμε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ μια ευθεία (ε) της μορφής $y=\lambda x+\beta$ όταν $\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$.

Τότε $\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$

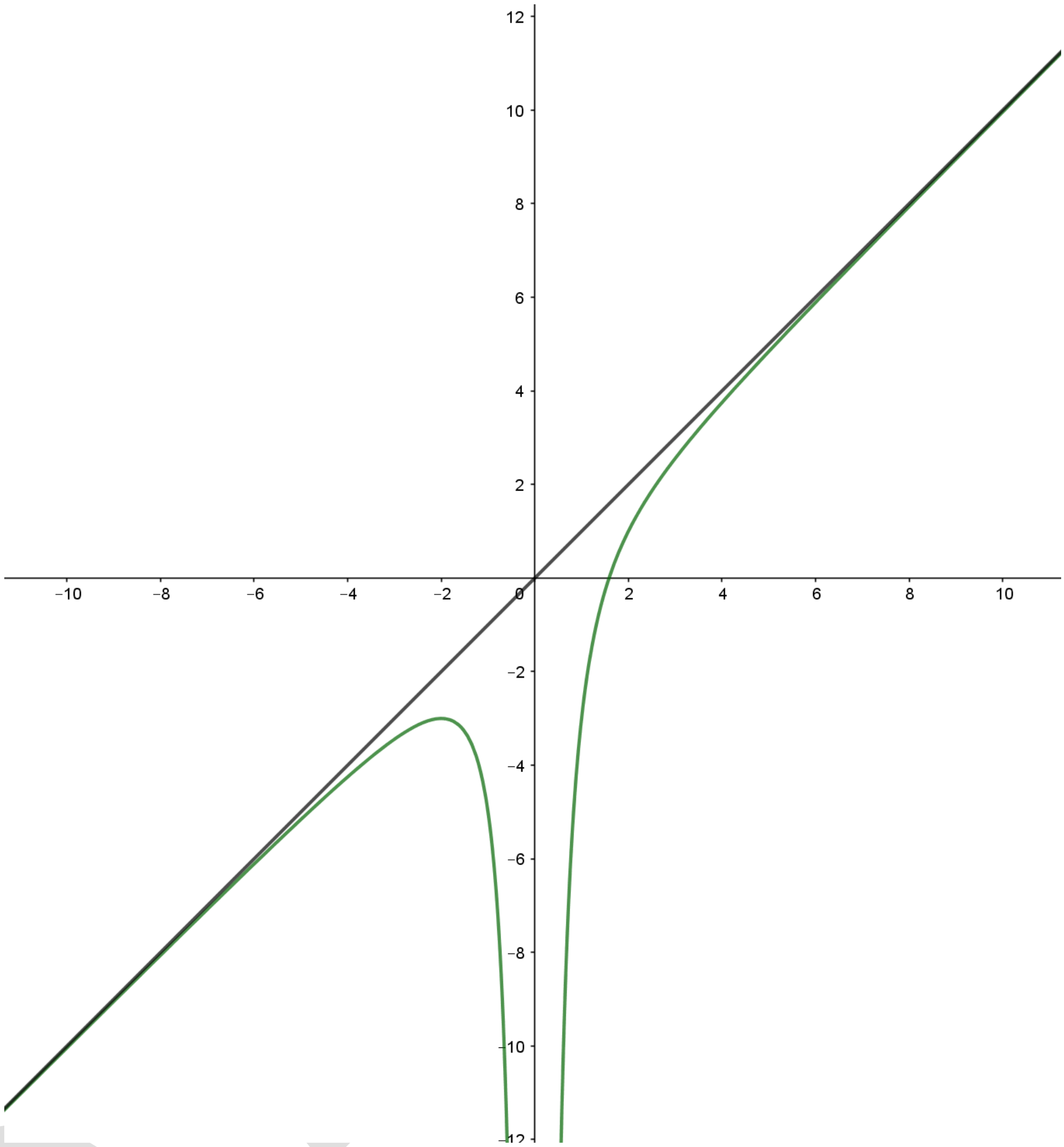
δηλαδή $\boxed{\lambda=1}$ και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]\overset{\lambda=1}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}-\frac{4}{x^2}-\cancel{x}\right)=-4\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=-4\cdot0=0$$

δηλαδή $\boxed{\beta=0}$

Άρα η ευθεία δηλαδή (ε): $\boxed{y=x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου θα έχει μήκος $\frac{x}{4}\mathrm{m}$ και το μήκος του κύκλου θα είναι $(8-x)\mathrm{m}$ οπότε ο κύκλος θα έχει ακτίνα $\frac{8-x}{2\pi}\mathrm{m}$.

Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$E_{\tau}=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}\mathrm{m}^2.$$

και το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με

$$E_{\kappa}=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(8-x)^2}{4\pi}\mathrm{m}^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\text{, με } 0<x<8$$

Γ2. Η $E(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $(0,8)$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με:

$$E'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}$$

$$E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{32}{\pi+4}$$

Το πρόσημο της $E'(x)$ και η μονοτονία της $E(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x	$-\infty$	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8	$+\infty$
$E'(x)$			$-$	0	$+$		
$E(x)$			$\searrow$	τ.ελ.	$\nearrow$		

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων γίνεται ελάχιστο για $x=\frac{32}{\pi+4}$, που είναι η πλευρά του τετραγώνου όταν ισούται με την διάμετρο του κύκλου αφού:

$$\frac{x}{4}=2\frac{8-x}{2\pi}\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$$

Γ3. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $\mathrm{E}(x)=5$ έχει μοναδική λύση για $x\in(0,8)$.

Η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)$ οπότε

$$\mathrm{E}(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to\frac{32}{\pi+4}^-}\mathrm{E}(x),\lim_{x\to0^+}\mathrm{E}(x)\right)=\left(\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

Η $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ οπότε

$$\mathrm{E}(\Delta_2)=\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to8^-}\mathrm{E}(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

Αφού το $5\in\mathrm{E}(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $\mathrm{E}(x)=5$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο Δ_1, η οποία είναι μοναδική αφού $\mathrm{E}(x)$ γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.
Τέλος το $5\notin\mathrm{E}(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $\mathrm{E}(x)=5$ είναι αδύνατη στο Δ_2.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x \text{ και } f''(x)=2e^{x-\alpha}-2.$$

Λύνω την $f''(x)\geq0\Rightarrow2e^{x-\alpha}-2\geq0\Rightarrow e^{x-\alpha}\geq1\Rightarrow x-\alpha\geq0\Rightarrow x\geq\alpha$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$.

Δ2. Είναι

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}[e^x\left(\dfrac{2}{e^\alpha}-\dfrac{2x}{e^x}\right)=(+\infty)\left(\dfrac{2}{e^\alpha}-0\right)=+\infty$, διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα προσήμων της f'', προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Στο $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε

$$f'(\Delta_1)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,\,+\infty).$$

Στο $\Delta_2=(\alpha,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε

$$f'(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to\alpha^+}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(2-2\alpha,+\infty).$$

Αφού $2-2\alpha=2(1-\alpha)<0$ προκύπτει ότι:

- $0\in f'(\Delta_1)$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_1\in\Delta_1$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.
- $0\in f'(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_2\in\Delta_2$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

Σύμφωνα με τα παραπάνω

- για $x<x_1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)\Rightarrow f'(x)>0$,
- για $x_1<x<\alpha\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x_1)>f'(x)\Rightarrow f'(x)<0$,
- για $\alpha<x<x_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_2)\Rightarrow f'(x)<0$,
- για $x>x_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_2)\Rightarrow f'(x)>0$.

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0		−		0	+	
$f(x)$		↗	τ.μ.		↘		τ.ελ.	↗	

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=x_1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=x_2$.

Δ3. Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει ρίζα στο (α,x_2), δηλαδή υπάρχει $\rho\in(\alpha,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=f(1)$.
Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2]$ τότε η f είναι «1–1» οπότε $f(\rho)=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}\rho=1$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\rho\in(\alpha,x_2)$ και $\alpha>1$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

Δ4. Για $\alpha=2$: $f(x)=2e^{x-2}-x^2$ και $f'(x)=2e^{x-2}-2x$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=2$ είναι η

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y+2=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+2$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $\left[2,+\infty\right)$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f\left(x\right)\geq y \Rightarrow f\left(x\right)\geq -2x+2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$.

Άρα για $x\geq 2$ είναι $f\left(x\right)\geq -2x+2 \overset{\cdot\sqrt{x-2}\geq 0}{\Leftrightarrow} f\left(x\right)\cdot\sqrt{x-2}\geq\left(-2x+2\right)\sqrt{x-2}$.

Αφού οι συναρτήσεις $f\left(x\right)\cdot\sqrt{x-2}$ και $\left(-2x+2\right)\sqrt{x-2}$ είναι συνεχείς στο $\left[2,+\infty\right)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$, τότε

$$\int_2^3 f\left(x\right)\cdot\sqrt{x-2}dx > \int_2^3\left(-2x+2\right)\sqrt{x-2}dx.$$

Για το $\int_2^3\left(-2x+2\right)\sqrt{x-2}dx$ θέτω $\sqrt{x-2}=u\Leftrightarrow x-2=u^2$

Τότε $dx=2udu$ και

- για $x=2$ είναι $u=0$,
- για $x=3$ είναι $u=1$.

Άρα,

$$\int_2^3\left(-2x+2\right)\sqrt{x-2}dx=\int_0^1\left[-2\left(u^2+2\right)+2\right]u\cdot 2udu=\int_0^1\left(-2u^2-2\right)2u^2du=$$

$$=\int_0^1\left(-4u^4-4u^2\right)du=\left[-4\cdot\frac{u^5}{5}-4\cdot\frac{u^3}{3}\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{12}{15}-\frac{20}{15}=-\frac{32}{15}$$

Επομένως $\int_2^3 f\left(x\right)\cdot\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$.